972. D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Sugli scivolamenti metadidattici. Alcuni esempi. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *43A*(2), 108-136.

Sugli *scivolamenti metadidattici*. Alcuni esempi

Sunto. In Didattica della Matematica si è evidenziato da decenni il problema dello scivolamento metadidattico (glissement metadidactique) evidenziato da Guy Brousseau. Ma la pratica didattica scolare propone modelli di comportamento (insegnamento-apprendimento della Matematica) dai quali si evince che il tema è del tutto sconosciuto. In questo articolo si presenta il problema e si danno vari esempi negativi della sua influenza, soprattutto per quanto riguarda l’ingenua interpretazione della cosiddetta euristica di Polya relativa alla risoluzione dei problemi di Matematica.

Summary. In Mathematics Education, the problem of metadidactic slippage (glissement metadidactique) has been highlighted for decades by Guy Brousseau. But school teaching practice proposes patterns of behavior (teaching-learning of Mathematics) from which it is evident that the theme is completely unknown. In this paper we present the problem and gives several negative examples of its influence, especially with regard to the naive interpretation of Polya’s so-called heuristics related to the problem solving in Mathematics.

D’Amore Bruno e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Sugli *scivolamenti metadidattici.* Alcuni esempi

D'Amore Bruno[1 2] - Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

[1] DIE Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
[2] NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia

1. Polya e la risoluzione dei problemi

La produzione non scientifica ma divulgativa del grande matematico ungherese – statunitense George Polya (1887 – 1985) si è sviluppata fra il 1945 e il 1967; si tratta dei due famosi libri tradotti in molte lingue: 1. *How to Solve It*; 2. *Mathematics of Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics*; *Mathematics of Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Reasoning*. (Polya, 1945/1967, 1954). In questi libri divulgativi, Polya ha illustrato e reso noto al vasto pubblico il suo modo personale di affrontare e risolvere i problemi, modo davvero geniale, ammirato da tutti quei matematici che hanno apprezzato i suoi eccellenti risultati in probabilità, teoria dei numeri, calcolo combinatorio e nello studio di particolari serie. Prezioso, per conoscere l'opera di Polya, il lungo e dotto necrologio scritto dal matematico statunitense Ralph Philip Boas (1912 - 1992) che è stato anche co-autore di Polya (Boas, 1990).
Questo tipo di analisi non è unico nel mondo della Matematica, anzi segue per così dire una tradizione.
Per esempio, nel 1910 lo psichiatra e giornalista francese Édouard Toulouse (1865 – 1947) pubblicò un celebre libro nel quale narra le analisi da lui compiute a fine XIX – inizio XX secolo su Henri

Poincaré (1854 – 1912), uno dei più geniali creatori matematici di tutta la storia (Toulouse, 1910), dopo averlo osservato per molto tempo al lavoro e aver dialogato con lui sulle sue abitudini lavorative e sulle sue modalità di pensiero creativo. Ne esce un ritratto piuttosto insolito del Poincaré matematico-essere umano, che cozza fortemente contro ogni stereotipo sulla figura del matematico, da tanti punti di vista (si veda D'Amore e Sbaragli, 2020).
Anche il grande matematico francese Jacques Hadamard (1865 – 1963), famoso per i suoi eccellenti risultati sulle equazioni alle derivate parziali, per un suo teorema sui numeri primi, per una disuguaglianza e per una matrice che portano il suo nome, per gli studi in Meccanica quantistica, dedicò tempo ed energie a studiare quella che lui stesso chiamò "psicologia dell'invenzione in Matematica" che ebbe un successo straordinario. Il volume originale è del 1945 e ancora oggi si pubblica (Hadamard, 1945). Hadamard non ricorre a psichiatri, lui stesso compie l'indagine; giunse ad affermare che il pensiero matematico è un'attività che non si serve di parole ma di immagini mentali e di sensazioni di ogni genere. Per la sua ricerca, nei primi anni del XX secolo intervistò un centinaio tra matematici e fisici [fra i quali Albert Einstein (1879 – 1955)] e osservò sé stesso al lavoro, per provare che le sensazioni creative si rivelano spesso attraverso sensazioni fisiche.

A differenza di quel che è stato scritto su Poincaré e Hadamard, la narrazione dei metodi di Polya e la confessione pubblica di come egli abbia raggiunto i suoi risultati si sono trasformate, per alcuni lettori dell'epoca, in una specie di "metodologia generale della risoluzione dei problemi", una sorta di "euristica vincente" che, con considerazioni superficiali, è stata spacciata anche come modalità da usare in aula. Le "regole" interne e personali, che Polya enumera e descrive brillantemente e generosamente con esempi, sono state infatti ingenuamente considerate come una sorta di via maestra da seguire nel processo di insegnamento, certi che l'apprendimento sarebbe stata una logica conseguenza.

A quei tempi ancora non si parlava di Didattica della Matematica come disciplina, ancora non era stata creata; cominciò a farlo Guy Brousseau proprio dalla fine degli anni ’60, lungo il corso della decade ’70, culminando nella creazione di una vera e propria teoria dell’apprendimento matematico a metà degli anni ’80.
Ora, che cosa volesse proporre ai suoi lettori Polya era ed è molto chiaro sulla base delle sue stesse parole: proporre sé stesso come modello, visto che si tratta di un modello vincente; e proporre le sue tappe come esempi che chiunque potrebbe seguire.
Oggi, mentre la storia di questi strumenti personali così efficaci nel caso di Polya sono considerati di grande interesse storico e psicologico, nessuno più oserebbe considerarli scientificamente idonei per studi di Didattica della Matematica da utilizzare in aula, se non coloro che non hanno studiato o hanno mal studiato la Didattica della Matematica. Normalmente questi strumenti di Polya sono osannati o citati con favore da chi non sa che cosa è successo negli ultimi decenni grazie alla Didattica della Matematica e alla ricerca sviluppatasi al suo interno. A costo di ripeterci, dunque, ribadiamo che un’eventuale citazione di Polya da questo punto di vista è interessante dal punto di vista storico e forse psicologico, ma non certo dal punto di vista didattico, come mostreremo nei prossimi paragrafi.
Prima di affrontare questo argomento specifico, dobbiamo però presentare uno dei temi di ricerca che la disciplina Didattica della Matematica ha affrontato negli ultimi decenni.

2. Il (negativo) fenomeno dello scivolamento metadidattico

L’uso nella prassi didattica di sistemi euristici eretti a modello che sostituiscono un apprendimento matematico con l’apprendimento di un’analogia il più possibile algoritmica e sequenziale rientra in un fenomeno negativo e controproducente evidenziato dalla ricerca

seria in Didattica della Matematica che va sotto il nome di "scivolamento metadidattico", assai diffuso e pericoloso, eppure talvolta perfino favorito da alcuni insegnanti.
Esso si dà quando si passa dallo studio di un tema matematico T, che dovrebbe costituire oggetto di apprendimento, allo studio degli strumenti che al più potrebbero servire o per illustrare il tema T o per affrontare la risoluzione di un problema relativo a quel tema T, come banale schema e non come reale apprendimento (il che dovrebbe comportare come conseguenza la risoluzione corretta, appropriata, generale di problemi concernenti quel tema T). Ma se lo scivolamento ha successo, lo studente impara a comportarsi per analogia nei casi previsti da T, non ad apprendere consapevolmente T. Lo studente apprende uno schema, un algoritmo, un esempio generalizzato, non il tema T. Spesso, poi, alcuni insegnanti (quando sono disinformati in Didattica della Matematica) confondono questi due livelli, accettano in buona fede la situazione che appare superficialmente come positiva, anzi loro stessi la creano e la propongono in aula, confortato dai suggerimenti di "esperti", e dunque il gioco è fatto: tutti sono soddisfatti. Ma il tema matematico T resta per lo studente un mistero.

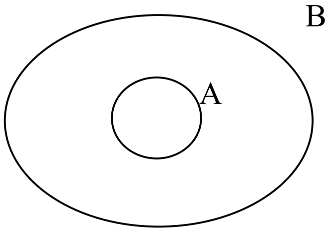
Per far capire bene la questione, suggeriamo alcuni esempi scelti fra i più diffusi.

1. Consideriamo problemi molto diffusi nelle scuole di tutto il mondo del tipo: «3 operai fanno un certo lavoro in 9 ore; ma se gli operai al lavoro sono 6, quante ore occorreranno per fare lo stesso lavoro?». Si tratta una proporzione con un termine incognito, $a : b=c : d$.
Per capire e dunque risolvere consapevolmente questo tipo di problemi è stato ideato da tempo immemorabile un meccanismo grafico noto in tutto il mondo come "regola del 3". Tale modello trasforma la formulazione aritmetica in un grafico a frecce e questo sembra rendere più efficace la risoluzione del problema. Solo che,

come è successo e succede in tutti i Paesi, dopo un po' non si parla più del problema e del tema proporzioni, ma del grafico. Apprendere a usare la regola del 3 sostituisce quello che era all'origine il vero oggetto dell'apprendimento: conoscere e saper usare l'oggetto matematico "proporzioni". Lo studente impara a trattare e usare questo grafico (con frecce che hanno tra loro versi concordi e discordi) e, se anche gli riesce di trovare il risultato di quel problema proposto, non impara a risolvere il problema o problemi analoghi perché non ha imparato l'idea di proporzionalità. Ha solo azzeccato il modo giusto di mettere le frecce. Se dimentica la regola del 3 o se sbaglia a mettere le frecce, non sa più risolvere quel tipo di problemi: non ragiona più, cerca la regola, l'algoritmo. Tanto è vero che, se invece di modificare *c* si modifica *d*, lo studente non sa più che cosa fare.

2. Altro esempio funesto si è avuto con l'avvento nelle aule della teoria ingenua degli insiemi negli anni '70 e '80, per un'idea sovrastimata di alcuni matematici di un certo prestigio, in buona fede, ma che poco avevano a che fare con i problemi di insegnamento - apprendimento. Dopo qualche anno, si è inserito nel mondo della scuola il problema della rappresentazione degli oggetti della teoria degli insiemi e dunque si sono introdotti circoli o ellissi per indicarli; di lì a poco, si è smesso di studiare la teoria degli insiemi, e si è cominciato a teorizzare su come disegnare e usare i grafici, essendo questo diventato il tema. Per cui gli studenti che apprendevano qualcosa, non apprendevano la logica come linguaggio di base della matematica, il che era lo scopo iniziale, apprendevano a dominare i disegni dei grafici. Altro scivolamento metadidattico. Meno male che il pasticcio che è seguito a tutto ciò è servito a far fuori questo inutile contenuto matematico, anche grazie a interventi di altri matematici di identico prestigio. Fra questi ultimi ricordiamo René Thom (1970/1980, 1973) e Morris Kline (1973) (tutto ciò è narrato con particolari in D'Amore, 1999).

Chiunque è in grado di capire, senza dover studiare per anni una … teoria dei circoletti, a intuito, che: se gli oggetti *a* sono solo una parte degli oggetti *b* (per esempio: tutti i quadrati sono rombi), allora si può usare come rappresentazione grafica un paio di circoletti disposti nel modo seguente (A è l'insieme degli oggetti *a*, B è l'insieme degli oggetti *b*).



Questo ridicolo fenomeno mostra che, per risolvere una difficoltà, a volte perfino minore, si dà luogo a una cascata di procedimenti pseudo didattici che può condurre a un processo che a poco a poco si converte in un mostro incontrollabile.

3. Le cosiddette "prove" delle operazioni, meccanismi algoritmici per verificare la correttezza delle operazioni; tutti sanno che si tratta di algoritmi inutili perché non garantiscono nulla. Per esempio la prova del 9 della seguente moltiplicazione: 137×24=2271, sancisce che tale moltiplicazione è corretta, contro ogni evidenza. L'unica "prova" possibile sarebbe eseguire (correttamente) la divisione 2271:24 per vedere se dà come quoziente 137, una modalità che permette di confermare un apprendimento: le operazioni di moltiplicazione e di divisione sono l'una inversa dell'altra. (Naturalmente, anche questa "prova" può dar adito a errore).

4. La tecnica di divisione fra frazioni. Tutti sanno che per eseguire la divisione a/b:c/d si deve eseguire la moltiplicazione a/b×d/c (b, c, $d \neq 0$). Ma nessuno spiega più in aula il perché di questa "regola",

accontentandosi dello scivolamento metadidattico. Addirittura la consegna è esplicita: «Si *deve* fare così» oppure: «*Basta* fare così»: questo è quanto si deve sapere, quanto si aspetta di sentirsi rispondere l'insegnante. Nelle nostre esperienze, quasi nessun docente mostrava di saper rispondere alla spontanea domanda: Perché?

5. Saper effettuare le addizioni è un punto di forza della scuola primaria; ma a volte si converte in una pluralità di algoritmi che non hanno spiegazione se non come strumento e non come conoscenza. Non solo il bambino deve apprendere a calcolare una somma, per esempio onde poter dare risposta a un problema, ma lo deve fare con diverse modalità strumentali algoritmiche: in colonna, "in riga", a mente, sull'abaco. L'oggetto di conoscenza non è più l'algoritmo dell'addizione, ma una raccolta di modalità che poco hanno a che fare con il senso matematico dell'operazione stessa. E così, il senso che avrebbe il calcolo dell'addizione nel corso della risoluzione di un problema, viene distorta dallo scivolamento metadidattico e il vero problema per il risolutore è quello di saper eseguire l'addizione in tante modalità distinte. Lo studente perde il senso che ha la risoluzione del problema e trasforma la propria attività in esecuzioni algoritmiche.

6. Si deve moltiplicare un numero per 10 o per 100. Non si devono fare i calcoli, si deve aggiungere uno zero o due zeri rispettivamente alla fine del numero, dopo l'ultima cifra. Non solo non è chiaro il perché, ma diventa problematico non appena il moltiplicando non è naturale, ma è un razionale scritto con la virgola o con una frazione. Tutti gli insegnanti lo sanno. Un sapere diventa una regola pseudoalgoritmica che ha un funzionamento non dominabile da tutti. E quando poi si tratta delle analoghe divisioni, i risultati negativi di questo scivolamento metadidattico sono sotto gli occhi di tutti i docenti.

7. Si indica un oggetto matematico con un simbolo, semmai grafico (un disegno, un diagramma, …); poi si smette di pensare all'oggetto matematico astratto iniziale e tutto si rimanda al grafico stesso. Per esempio, si definisce un angolo piano.[1] (Quasi mai si definisce l'ampiezza di un angolo e la si dà come intuitiva. Spesso in gradi si misura l'angolo e non la sua ampiezza). Invece che chiarire che cosa sia dal punto di vista matematico un angolo e che l'ampiezza è una sua misura, ci si limita a disegnare un archetto un po' distante dal vertice, archetto che va da un lato all'altro; tendenzialmente si fa sì che esso sia un arco di circonferenza (per ciò lo si chiama "arco") che ha il centro nel vertice dell'angolo e il raggio di misura a piacere. Quell'arco sta talvolta a indicare l'angolo, tal altra l'ampiezza. A questo punto ci si dimentica dell'oggetto angolo e si studia l'archetto. Tanto è vero che (Sbaragli, 2005) ci sono studenti anche universitari che ritengono che l'angolo sia quell'archetto e non una parte di piano (per dirla secondo le dizioni correnti); e che la lunghezza dell'archetto misuri l'ampiezza dell'angolo, con la conseguenza che, a seconda di dove si disegna concretamente tale archetto, la misura dell'ampiezza di quell'angolo cambia. Qui, lo scivolamento metadidattico è cognitivamente mortale, ma la maggior parte degli insegnanti non se ne rende conto.

8. La scrittura posizionale dei numerali rappresenta una trappola mortale per gli aspetti cognitivi, soprattutto a causa dello scivolamento metadidattico. Se Natalia possiede 123 palline, nessuno mette in dubbio che ella disponga di 123 unità, dove ogni unità è una pallina. Dunque, nel numerale 123 ci sono 123 unità.

[1] Purtroppo la maggior parte delle definizioni di angolo date in aula e sui libri di testo sono erronee; per esempio, quasi mai si prende in esame se le semirette che costituiscono i lati dell'angolo fanno parte o no dell'angolo stesso, la qual cosa non è senza conseguenze: se i lati fanno parte dell'angolo, un angolo nullo è una semiretta, un angolo giro è l'intero piano; se i lati non fanno parte dell'angolo, un angolo nullo è un insieme vuoto, un angolo giro è l'intero piano privato di una semiretta.

Sembra ovvio. Ma se Natalia decide di raggruppare (per suoi scopi personali) le palline a dieci a dieci in scatolette, ella avrà 12 scatolette ciascuna contenente una decina di palline, più 3 palline sciolte. Dunque Natalia dispone di 12 decine e 3 unità; il che significa che continua pur sempre a disporre di 123 palline-unità. Ora Natalia, decide (sempre per suoi scopi personali) di raggruppare le scatoline-decine in una scatola più grande, raccogliendo le decine a dieci a dieci; riuscirà a raccogliere solo 10 decine che metterà in una scatola che ovviamente conterrà 100 palline, cioè 10 decine, cioè 1 centinaio. (Il nostro *sistema posizionale* di scrittura dei numeri si chiama *decimale* proprio perché si riunisce sempre a dieci a dieci per passare alle raccolte di livello superiore: unità→decine→centinaia→migliaia). Ma 2 di queste scatole-decine resteranno fuori dal contenitore grande. Dunque, a questo punto, Natalia dispone di 1 centinaio di palline, più 2 decine di palline, più 3 palline sciolte. Nessuno mette in dubbio che ella continua a possedere 123 palline, dunque 123 unità; nessuno mette in dubbio che ella continua a possedere 12 decine di palline più 3 palline sciolte. Si dovrebbe dire correttamente che nel numerale 123 le cifre 3, 2, 1 rappresentano i valori che appaiono nei "posti" unità, decine, centinaia del numerale 123: più precisamente 3 indica la cifra che appare nel posto delle unità, 2 indica la cifra che appare nel posto delle decine, 1 indica la cifra che appare nel posto delle centinaia. Sarebbe così semplice. Ma qui lo scivolamento metadidattico scatta quando si pretende di far dire allo studente che nel numerale 123 "ci sono": 1 centinaio (il che è corretto, casualmente), 2 decine (che è falso perché le decine sono 12), 3 unità (che è falso perché le unità sono 123). Invece che dedicarsi allo studio dell'oggetto matematico "scrittura posizionale", ora ci si occupa di questo scivolamento metadidattico e si pretende che gli studenti imparino a dire il falso. Per essere sicuri che l'errore avvenga nella totalità dei casi e che costituisca un pesante fardello, si assegnano colori alle cifre nei singoli posti: le unità vanno colorate in rosso, le decine di giallo, le centinaia di verde (stiamo inventando questo cromatismo errato e deleterio perché non sappiamo esattamente se ci sia già un accordo nazionale su questo punto infausto). E così, invece di spiegare il senso aritmetico corretto dell'oggetto matematico "scrittura posizionale", si finisce con il passare a una scrittura cromatica che obbliga gli studenti a far uso di matite colorate quando scrivono i numeri, di fatto annullando circa 7000 anni di storia e ricerca. Il vantaggio della scrittura posizionale, una delle invenzioni più geniali dell'essere umano nella sua lunga storia, è proprio il fatto che la stessa cifra, a seconda della sua POSIZIONE abbia valore diverso; mentre qui si ribalta tutto in maniera vergognosa, e non si hanno più scritture posizionali ma CROMATICHE. Invece che dire: "sistema posizionale decimale" si dovrebbe dire "sistema cromatico decimale". A volte l'insegnante si rifà all'abaco; ma sull'abaco, nella "scrittura" 123 non appaiono 123 dischetti-unità, ce ne sono in tutto solo 6, ma è la loro disposizione (1 nella colonna delle centinaia, la terza da sinistra; 2 su quella delle decine; 3 su quella delle unità) a dare il valore, non il colore. Dunque l'abaco, che viene eretto a modello, contraddice i risultati nefasti di questo scivolamento metadidattico. Se allo studente si chiede: «Quante decine ci sono nel numero 123», molti docenti danno per corretta la risposta errata 2 invece che la corretta 12. Anche confortati dal fatto che la cifra 2 è stata scritta in giallo. Il che spiega i risultati assai più che negativi che si registrano nelle risposte delle prove Invalsi.

Non si deve ritenere che gli esempi di scivolamento metadidattico siano presenti solo nelle scuole primarie e secondarie di I grado. Ci limitiamo a proporre solo uno fra i molti esempi che si incontrano nella scuola secondaria di II grado.

9. La cosiddetta regola di Ruffini, ben famosa nei primi due anni di scuola secondaria di II grado. Lo studente sta studiando i polinomi e dovrebbe saper eseguire la facile divisione $(2x^3-3x^2-5x-2) : (x-2)$ il che lo dovrebbe portare al quoziente $2x^2+3x+1$. Questo tema costituisce un ottimo argomento del sapere matematico. Ma nessuno

gli insegna come fare a eseguire la divisione, peraltro semplicissima. Gli si insegna invece uno schema formato da tutti i coefficienti in gioco che vanno messi in una particolare tabella in un determinato ordine. L'apprendimento non è più quello relativo alla divisione fra polinomi, ma è diventato come sistemare i coefficienti in questa tabella e che uso farne. È questo meccanismo che sostituisce l'apprendimento, quel che libri e docenti si aspettano da lui, un evidente scivolamento metadidattico a causa del quale si perde un significativo sapere che sarebbe importante possedere.

Ci fermiamo qui, ma si potrebbe proseguire a lungo in ogni dominio della Matematica e a tutti i livelli scolastici.

3. L'euristica di Polya e lo scivolamento metadidattico

Abbiamo identificato fenomeni di questo tipo come *scivolamento metadidattico* (Brousseau, D'Amore, 2018) (dal francese *glissement metadidactique*).
Questi fenomeni normalmente compaiono dopo una sconfitta, dopo un fallimento didattico, generalmente inevitabile; ma il fatto non viene immediatamente riconosciuto come fallimento mediante i mezzi che offre l'insegnamento tradizionale. Gli insegnanti spiegano, dopo di che spiegano le spiegazioni, poi le illustrano e poi spiegano le illustrazioni ... Ogni volta i tentativi di correggere i fallimenti iniziali sono inadeguati. Il fenomeno si amplifica sempre più e diventa rapidamente incontrollabile, come abbiamo visto negli esempi precedenti.
L' "euristica di Polya" e l'insegnamento dei suoi presunti "metodi" (di tipo pseudo-algoritmico) di problem solving sono un altro pericoloso esempio di scivolamento metadidattico che alcuni insegnanti non riescono nemmeno a riconoscere. Le difficoltà ben note che gli studenti incontrano nel risolvere i problemi

generalmente lasciano spesso alcuni insegnanti disarmati. Lo studente possiede una “sua” conoscenza, e tuttavia non trova i mezzi per usarla al momento di dover risolvere i problemi che l’insegnante propone. Una classica risposta ingenua a livello primario è quella di spingere a risolvere problemi simili in modo tale che lo studente possa poi riprodurre la soluzione insegnata in un caso simile. E questo assomiglia a ciò che Polya propone nella sua euristica; ma senza colpa, non voleva proporre una metodologia didattica, voleva solo mostrare il suo modo di agire personale e suggerirlo a chiunque volesse copiare la sua modalità di ricerca.
Lo studente non ha ovviamente bisogno di sapere se la sua risposta è adeguata o perché; è sufficiente che questa risposta sia conforme al modello previsto dal suo insegnante. Lo studente può quindi rispondere nell’ambito del contratto didattico senza nemmeno capire perché la sua soluzione sia corretta. Lo studente simula / adotta / usa / propone quindi una risoluzione che potrebbe anche non capire; l’insegnante la accetta e anzi la loda: è quanto basta a tutta la società.
In un modo più concreto, per guidare i suoi lettori, Polya espone consigli neo-cartesiani per l’organizzazione del lavoro di risoluzione dei problemi: comprendere l’affermazione, collegarla con la propria conoscenza, scomporla in fasi più semplici, ... Polya suggerisce di provare a fare dei passi ancora più euristici: cercare somiglianze, un esempio, un controesempio, generalizzare, confrontare, ... Questo lavoro introspettivo e generoso, è servito a ingenui didatti come base per un infruttuoso tentativo di insegnare a risolvere i problemi la cui base sta nell’uso di queste euristiche.
È chiaramente uno scivolamento metadidattico: la risoluzione dei problemi (come attività matematica di grande interesse, forse la più genuina) è dimenticata, sostituita da uno studio delle procedure elementari (cartesiane, appunto) per raggiungere tali risoluzioni. Gli esempi forniti sono di natura tale da rassicurare e rendere gli studenti anche meno brillanti competitivi, ma è chiaro che la situazione è cambiata senza cambiare natura: lo studente cerca di applicare la sua euristica, così come ha cercato di applicare la sua conoscenza, e il

successo non è per questo più assicurato, a meno che non vengano scelti problemi ad hoc, sulla base di accordi impliciti o espliciti nell'ambito del contratto didattico. Il che è quel che accade: sfilze di cosiddetti "problemi" (che in realtà sono esercizi) tutti identici. L'inganno didattico è fatale. L'unica differenza è che i saperi matematici significativi contengono in sé le loro stesse condizioni di validità, il che non accade nel caso delle euristiche che sono solo conoscenze e non saperi. Trattarli come saperi è un errore epistemologico e didattico.

Lo sforzo personale e generoso di Polya di proporre il suo proprio modo di fare come suggerimento euristico (che non aveva lo scopo di far smettere di imparare, anzi!) si è lentamente trasformato in un percorso pericoloso e controproducente. Il suo suggerimento metodologico resta un bell'esempio storico e personale, ma non è accettabile nel mondo della prassi didattica scolastica, oggi che abbiamo molto imparato dalla ricerca scientifica in Didattica della Matematica.

Comprendiamo che un errore o un fallimento portano la persona coinvolta, docente / studente, a trasferire la propria attenzione dall'attività in corso a uno dei mezzi di controllo o di conoscenza di questa stessa attività. Questo mezzo di controllo non è una vera conoscenza e ancor meno un sapere, è come se fosse una meta-conoscenza: non ho questa tal conoscenza, ma so quel che devo fare, quel che ci si aspetta da me; e dunque tendo a fare ciò.

Per esempio, per eseguire un'attività relativa a un tema di sapere S, colui che vi è impegnato A utilizza un mezzo M che si rileva insufficiente; per porre rimedio a ciò, A non sa di dover accedere a S per impadronirsene, rivolge invece a la sua attenzione a M, ignorando S, cercando di migliorare M e trasformarlo in strumento idoneo. A è così entrato senza via di scampo nel processo che costituisce uno scivolamento metadidattico.

Tale scivolamento metadidattico consiste per il docente nel cambiare l'oggetto di insegnamento di un'attività o di una nozione,

sostituendolo con uno dei suoi mezzi di controllo o di messa in evidenza. Questo scivolamento si produce, in particolare quando il mezzo è inappropriato o quando il sistema (allievo / docente) non può né abbandonarlo né respingerlo, dato che è stato imposto dal docente stesso o dalla prassi diffusa o dalla istituzione. È una forma di arrendersi al potere del contratto didattico, a qualcuno dei suoi deleteri effetti (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2020).
Come ulteriore conseguenza altamente negativa di questa ingenua interpretazione didattica dei suggerimenti di Polya, una ventina di anni fa si diffuse nel mondo occidentale la fallimentare idea di far precedere alla risoluzione di un problema di Matematica la realizzazione di quelli che vennero chiamati "diagrammi di flusso" (che erano poi dei diagrammi a blocchi) ispirati dal recente successo dell'informatica. In questo caso si è visto che per i bambini si rivelava assai più complessa questa stesura che non la risoluzione stessa del problema; il simbolismo schematico, che avrebbe dovuto aiutare, diventava l'oggetto stesso dell'apprendimento e dell'attività di risoluzione, il che costituisce uno "scivolamento metadidattico". Nelle nostre ricerche abbiamo dichiarazioni spontanee di bambini che ammettono di saper risolvere il problema ma di non saper costruire questo strumento (preteso dall'insegnante) il cui senso è per loro misterioso e che dovrebbe aiutarli. Fortunatamente, la violenta lotta dei didatti e il diffuso buon senso degli insegnanti hanno cominciato a far fuori questa infelice prassi che però ancora resiste.

Fra le deleterie e piuttosto deprimenti trasformazioni che l'idea geniale di Polya ha subito, c'è la più diffusa, almeno in Italia: una sequenza "assolutamente efficace" per risolvere qualsiasi tipo di problema; essa consta di una successione di norme concrete comportamentali quasi algoritmiche da seguire attentamente per non fallire:
leggere attentamente più volte il testo del problema

fare un circoletto colorato attorno ai dati del problema (che sono numeri)
leggere più volte la domanda e poi sottolinearla con un colore diverso
cercare nel testo del problema la "parolina chiave" che indica qual è l'operazione da eseguire fra i dati disponibili (per esempio: "in tutto" vuol dire che devi usare l'addizione, "perde o regala" comporta la sottrazione)
eseguire l'operazione fra i dati, trovare il risultato di tale operazione
il risultato trovato è la risposta corretta al problema.
La cosa è talmente scorretta didatticamente da creare imbarazzo al solo pensiero che qualcuno l'abbia davvero così formulata e che circoli nelle nostre scuole; addirittura l'abbiamo vista scritta in grandi cartelloni a disposizione dei bambini in aula.
Il contratto didattico regna sovrano, sembra quasi che si voglia far sì che il bambino sia fallimentare in Matematica e che sappia risolvere solo problemi preconfezionati secondo un cliché stabilito a priori, un accordo preciso fra insegnante e allievi.
Potremmo ora fare infiniti controesempi a questa supposta strategia vincente perché ricavata dalle regole di Polya, ma ci sembrerebbe di offendere l'intelligenza del lettore nel ritenere che egli ne abbia bisogno. E comunque tutto ciò è già stato tema di altri nostri articoli, con esempi vari. Qui ci esimiamo dal farlo.

Può essere interessante per il lettore docente di Matematica di scuola primaria una breve riflessione sui rischi che corre un giovane risolutore di problemi, di fronte a proposte di attività sotto il condizionamento (più generale) del contratto didattico. Ci limiteremo a fare 3 esempi.

Esempio 1. Il problema del pastore: «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?». Questo testo è già stato oggetto di varie analisi da parte nostra (a partire dal divulgativo D'Amore, 1993). Tutti sappiamo che la risposta corale non è quella corretta,

auspicabile, del tipo: «Questo problema non ha senso, perché non c'è alcun legame fra la prima parte, la descrizione della situazione, e la seconda, la domanda» (naturalmente detta con parole dei bambini e non con questa frase da adulti), ma un assai più laconico «18». Se i bambini sono stati allenati a dare sempre comunque una risposta numerica a qualsiasi tipo di problema e se, peggio ancora, hanno seguito le "regole euristiche certamente vincenti" da noi descritte poche righe fa, allora non c'è scampo. La risposta sarà certamente sempre «18». (In aula, fuori dell'aula le cose vanno diversamente). Il bambino legge attentamente più volte il testo del problema, fa due circoletti rossi attorno ai due dati numerici del problema (12 e 6), legge più volte la domanda, la sottolinea in verde, cerca nel testo del problema la "parolina chiave" che indica qual è l'operazione da eseguire fra i dati disponibili (nel nostro caso c'è, si tratta di quella congiunzione "e" che suggerisce un'addizione), esegue dunque l'addizione 12+6, trova la somma 18 che è, deve essere, non può che essere la risposta corretta al problema, dato che questa condotta euristica (come ha assicurato l'insegnante) è sempre vincente.
Se poi il testo è il seguente: «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni in tutto ha il pastore?», allora i risultati sono, se possibile, ancora più avvilenti. Ma non occorre spiegare il perché.

Esempio 2. Il passo più lungo. Nell'anno scolastico 2008 – 2009, tra le prove nazionali italiane Invalsi di Matematica destinate agli studenti delle classi quinte di Scuola Primaria, appariva la seguente proposta: «D9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28. Chi ha il passo più lungo?
□ A. Renata. □ B. Fabio. □ C. Maria. □ D. Non si può sapere».
I risultati nazionali in percentuale sono stati i seguenti:
mancata risposta: 0,2 A: 42,9 B: 2,2 C: 49,5 D: 5,1.

A prima vista, il risultato è eccellente: il 49,5% di studenti italiani dà la risposta esatta.
Ma, se si legge da un altro punto di vista, il 50,5% di studenti italiani NON dà la risposta esatta a un problema che nulla ha a che vedere con competenze / conoscenze matematiche ma solo con il buon senso e con la capacità di leggere un testo, interpretarlo e immaginarsi la situazione.
Lasciamo pure stare quello 0,2% che non dà risposta, quel 2,2% che dà una risposta del tutto fuori di luogo e quel 5,1% che, non sapendo che cosa rispondere, si rifugia nella classica scappatoia "Non si può sapere"; e puntiamo invece tutta l'attenzione sulle due risposte che hanno un certo senso:

- senso corretto, quello sperato (risposta C): ha il passo *più* lungo chi fa *meno* passi per misurare l'aula: 49,5% di risposte;
- senso sbagliato (risposta A): ha il passo *più* lungo chi ha fatto *più* passi per misurare l'aula: 42,9% di risposte.

La spiegazione della fallimentare riposta A è ancora legata a una superficiale norma contrattuale legata alle "paroline-chiave" e all'importanza spacciata per fondamentale (ma anch'essa superficiale) dei dati numerici: la domanda è «*più* (lungo)», la risposta dunque è «*più* (passi)». Se la risposta deve essere data senza riflettere, ma solo seguendo norme euristiche o analogie, un certo senso la risposta ce l'ha.
Può essere interessante sapere che la maggior parte degli insegnanti intervistati per avere un'interpretazione di questo fallimento è legata alla differenza fra «le prove cui gli studenti sono abituati» e le "prove Invalsi". Su questo tema torneremo fra breve (nel paragrafo 4.).

Esempio 3. Come conviene fare la spesa. Se si instaurano in aula (il più delle volte all'insaputa del docente, ma *sempre* favorite da questi) le norme del contratto didattico, queste non agiscono solo in quelle modalità evidenti da noi poste in luce fin qui, e studiate anche dalla ricerca in Didattica della Matematica più classiche (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2020), ma anche in maniera

sottilmente nascosta e subdola. Per esempio in D'Amore e Fandiño Pinilla (2019) abbiamo presentato una lunga e complessa ricerca che si basa su tre problemi; riportiamo qui solo i testi dei primi due:
«*Problema 1*. Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?
Problema 2. Il signor Gigino vuole imbiancare il suo garage; ha un po' di esperienza e sa che gli serviranno esattamente 10 litri di vernice. Va nel negozio Arcivernice (negozio A) e vede che lì vendono la vernice solo in barattoli da 4 litri; ogni barattolo costa 18 euro. Poi va nel negozio Bellavernice (negozio B) e vede che lì vendono la stessa vernice solo in barattoli da 3 litri; ogni barattolo costa 15 euro. Come gli conviene comprare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?».
Il lettore – docente di primaria, più esperto in queste cose, riconosce che si tratta di situazioni problematiche rientranti fra quelle tanto di moda denominate "situazioni di realtà"; nel nostro studio abbiamo preso in considerazione anche questo aspetto, ma qui sorvoliamo.
Come si può leggere, la domanda non è mai "Dove", ma sempre "Come". Ebbene, siccome nei testi usuali e stereotipati che trattano acquisti, mai si dà il caso che una spesa possa essere effettuata parte in un luogo e parte in un altro, la grande maggioranza dei bambini ha ritenuto di dover interpretare la domanda come un "Dove", indicando dunque in entrambi i casi un negozio unico e non accettare di fare la spesa parte in un negozio e parte nell'altro. La proposta fatta dai ricercatori (un "Dove" che spiazza il solutore) veniva interpretata come fuori di luogo, inaccettabile. Ma la cosa più interessante è che la maggior parte degli insegnanti che si sono gentilmente sottoposti alla prova hanno reagito nello stesso modo, mostrando anche stizza, nervosismo o sorpresa di fronte alla

possibilità che si potesse dividere la spesa fra due negozi anziché effettuarla in uno unico.
Il contratto didattico, dice sempre Guy Brousseau, riguarda entrambi gli attori in gioco, insegnante e allievo. Non solo l'allievo. Parte notevole del processo di insegnamento- apprendimento è quello di portare il bambino a rompere il contratto, il che costituisce l'unica forma efficace e autentica di apprendere e l'unica forma di porsi autenticamente di fronte ai problemi. Ma se le norme contrattuali imbavagliano e incatenano entrambi gli attori del processo scolastico, allora rompere queste norme è impossibile, con grande nocumento per la scuola tutta e per la Matematica in particolare.
Il lavoro da noi citato è assai più complesso e lungo; a esso rimandiamo nel caso qualche lettore volesse saperne di più.

Fra i tanti studiosi, soprattutto psicologi, che hanno lavorato nella direzione da noi delineata, quella cioè di fornire come modello comportamentale per la risoluzione di un problema da parte di un essere umano, anche di uno studente a scuola, soprattutto su temi matematici, una sequenza più o meno algoritmica, alcuni sono nomi di grande rilievo; ciò che li accomuna, pur nelle molte differenze, è stato il tentativo di trasformare per davvero le varie e complesse fasi che costituiscono tale risoluzione in una sequenza che ritenevano vincente.
Non citiamo in modo approfondito questi studi, il che ci porterebbe lontano e occuperebbe troppo spazio. Ricordiamo solo i principali: Ausubel (1968), Forehand (1976), Gagné (1962, 1973, 1976), Gagné e Briggs (1974), Gagné e Brown (1961), Gagné, Mayor, Garstens e Paradise (1962), Gagné e Paradise (1961), Kleinmuntz (1976). Altri studi di psicologi, invece, condannavano questo modo di proporre il … problema a dei problemi, per esempio Resnick e Ford (1991).
Per saperne assai di più, in dettaglio, si vedano D'Amore (2014, 2020).

Suggeriamo altri studi di grande interesse relativi alla risoluzione dei problemi in matematica: D’Amore e Zan (1986a, b), Zan (1998, 2000, 2002, 2007), Bonotto e Baroni (2011).

Facciamo notare che agli aspetti più significativi dell’euristica di Polya si ispira il filosofo della scienza Imre Lakatos (1922-1974), come è riconosciuto anche in Van Bendegem (2016); sappiamo bene, d’altra parte, che Lakatos mostrò sempre interesse verso problemi aventi a che fare con l’insegnamento. Va ricordato che Lakatos non fece in tempo a conoscere la Didattica della Matematica.
Anche Fernando Zalamea (2012, pp. 72-74) presenta una breve analisi delle proposte di Polya soprattutto per quanto concerne gli aspetti analogici, le costruzioni induttive e alcuni aspetti della deduzione; tali analisi mostrano l’interesse ancora vivo per questo profondo autore, dal punto di vista epistemologico.
Che gli studi sulle proposte analitiche di Polya siano ancora attuali, anche fra gli psicologi, è testimoniato dal lavoro di Carifio (2015); fra le caratteristiche specifiche delle proposte di Polya si sottolineano gli aspetti metacognitivi (pertinenza, prossimità e qualità) che emergono grazie alle attività di mobilitazione, organizzazione, isolamento. Tutto ciò produce sia emozioni positive che negative, ma entrambe sono basi per la risoluzione dei problemi di matematica (difficili, asserisce l’autore).

Nel suo citatissimo lavoro (Schoenfeld, 1992), Alan Schoenfeld presenta una sua personale interpretazione del lavoro di Polya sia dal punto di vista della ricerca matematica, nel quale si evidenza la tendenza a fare del problem solving il focus stesso della matematica, sia dal punto di vista dell’educazione matematica. Schoenfeld parla di “arte del problem solving”, anche proponendo una storia di questo atteggiamento.
Alla base della proposta euristica di Polya c’è l’idea che la matematica deve essere considerata come un’attività, più che un

processo di deduzione logica, formale; nelle parole di Schoenfeld, Polya ha sostenuto più volte che la matematica è simile alle scienze fisiche il che comporta una forte componente induttiva e di scoperta, assai lontana dalle concezioni formali di molti matematici dell'epoca. Inoltre, per Polya, l'epistemologia matematica e la pedagogia matematica (così viene denominata da Schoenfeld) sono profondamente intrecciate. Se la matematica ha tali connotazioni, anche nelle scuole esse vanno incoraggiate e le conseguenti attività degli studenti devono rispondere a questo modo di vedere. Inoltre, la matematica va concepita come un atto di senso, socialmente costruito e trasmesso socialmente.
Negli anni '80 si è avuto il trionfo di questo modo di pensare, ma, afferma Schoenfeld, una letteratura critica superficiale ha spesso banalizzato lo spirito del lavoro di Polya che, infatti, nella sua opera si rivolge spesso a "persone con raffinatezza matematica" e non a principianti della matematica.
Schoenfeld asserisce che le caratterizzazioni euristiche da parte di Polya a proposito della risoluzione dei problemi erano "descrittive piuttosto che prescrittive". Ben altro, dunque, rispetto alla creazione di comportamenti standard proposti in modo banale, come abbiamo più volte detto sopra. Per esempio, prendiamo in esame anche solo il considerare le caratterizzazioni che passo passo servono a riconoscere le strategie quando sono state utilizzate in casi precedenti; prove fatte mostrano che le persone coinvolte in prove non avevano affatto familiarità con le strategie precedenti già usate per poterle riusare. Altro punto critico si è rivelato una fase apparentemente semplice come l'esaminare casi speciali all'interno di un processo o riconoscere casi analoghi. Tutto ciò può essere semplice per un professionista della matematica, ma non esserlo affatto per un principiante, come uno studente.

4. I test nazionali e internazionali e lo scivolamento metadidattico: la nuova frontiera della "antididattica"

Dal momento che stiamo parlando di questo problema, esiste un pericolo attuale in questa direzione relazionato con i test nazionali e internazionali.

Oggi, i mezzi di valutazione della qualità del sistema scolastico tramite test tendono a invadere non solo il dibattito sulla scuola ma anche le pratiche scolastiche coinvolgendo anche la stampa non specialistica e i quotidiani. Da mezzo di controllo dei risultati o di semplice misurazione del sistema (non misurazione individuale) dell'apprendimento, tali test sono stati trasformati, in un primo momento, in obiettivi, in seguito in mezzi di educazione e infine in oggetti stessi dell'insegnamento. Questi atteggiamenti tendono a trasformare la nostra concezione della conoscenza e dell'apprendimento in una sorta di preparazione a una banale forma di cercare analogie e non conoscenze basate sul sapere. Si tratta, ancora una volta, di uno scivolamento metadidattico estremamente potente e pericoloso. Nel sistema scolastico, il fatto di controllare una conoscenza la isola dal suo contesto e la trasforma in una "conoscenza da insegnare" che non può ridursi alla ricerca di banali analogie superficiali (i problemi fatti così si risolvono in questo modo: …).

Nel sogno del raggiungimento di risultati di alto livello da parte di tutti gli studenti della nazione, della regione, della singola scuola, della propria classe, insegnanti e editori propongono, mettono in campo, usano e difendono manuali di istruzione (come risolvere i quesiti dei test nazionali e internazionali) non aventi a che fare con il favorire l'apprendimento della Matematica, ma dedicati a come risolvere i problemi, creando modalità artificiali del tutto improduttive, negative. Lo scopo principale originale era apprendere la Matematica, apprendere a risolvere i problemi di Matematica. Pian piano è diventato: imparare strumenti, metodi, algoritmi fasulli per dare la risposta attesa, anche senza essere padroni dei temi evocati nei testi proposti, per esempio imparando analogie fra enunciati di problemi: questo tipo di problemi si risolve così e così; dunque quando sei di fronte a un problema fatto così, impara come fare a usare i dati, non importa che tu capisca quel che stai facendo. Lo scopo non è imparare, lo scopo è ottenere un punteggio nei test nazionali e internazionali che faccia piacere all'insegnante, alla comunità. In alcune nostre ricerche abbiamo evidenziato il disappunto di alcuni insegnanti nell'affermare che i bambini sbagliano i test nazionali e internazionali di Matematica dato che questi sono "così diversi" da quelli cui sono abituati (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013).

E questo servirebbe a giustificare i bambini che sbagliano e sé stessi nel loro operato di uniformità nella proposta di problemi che, abbiamo visto, devono essere risolti in base a regole dettate dal contratto didattico e sottoposte allo scivolamento metadidattico. Poco spesso appare una riflessione critica che possa mettere in dubbio la bontà delle proprie scelte didattiche e del proprio operato. Su questo tema troviamo ridicolo e acritico il comportamento (peraltro assai diffuso) di erigere a modello didattico quello delle nazioni i cui risultati nei test internazionali hanno successo (Singapore, Finlandia, …). Non appena si hanno i risultati di tali test, c'è, da parte della scuola, della stampa, dell'opinione pubblica un proliferare di suggerimenti tesi a riprodurre nei paesi con successi limitati o scarsi, i programmi, le modalità didattiche, il modello scolastico, i libri adottati in questi Paesi, come se questo potesse risolvere il problema delle mancate risopiste corrette alle domande. A nostro avviso questo comportamento dimostra solo che intervengono in questi dibattiti post test, sempre e solo le persone che non hanno competenze nel campo della ricerca didattica; d'altra parte, questo è uno dei tanti temi nei quali qualunque cittadino si sente esperto, come nella selezione dei giocatori di calcio da mettere in nazionale. Sappiamo anche di genitori, occupati in tutt'altro genere di mestiere, che si permettono di suggerire all'insegnante dei propri figli delle metodologie didattiche basate sul sentito dire o sul proprio buon senso.

5. Conclusione

Conoscenze e saperi formano una coppia di metaconoscenza con mutue influenze reciproche. Le conoscenze sono i mezzi impliciti per attivare e gestire i saperi. I saperi sono gli strumenti istituzionali e culturali per apprendere le conoscenze, le proprie e quelle altrui. Volerli trattare allo stesso modo, in particolare concepire le conoscenze solo come saperi, costituisce scivolamenti metadidattici permanenti. Ogni conoscenza implicita in un sapere richiede, per funzionare, nuove conoscenze che, una volta fissate, non possono più svolgere il loro ruolo. Ne risultano errori, malintesi, insuccessi che rilanciano richieste impossibili e pratiche inefficaci. In una visione economica, le conoscenze disponibili in aula sono il capitale e gli interessi sono i saperi acquisiti. L'insegnante professionista critico e consapevole deve distinguere ciò che dovrebbe essere detto da ciò che non deve essere detto. Questa arte umana esiste da milioni di anni; ciò implica il gioco sottile e incerto delle conoscenze vive, dubbiose e fugaci con i saperi sicuri e condivisi, il gioco del detto e del non detto.
Prima di pretendere di "migliorarlo" con misure sommarie e drastiche, è meglio quando meno studiarlo con umiltà.

Bibliografía

Ausubel D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Boas, R. P. (1990). George Pólya, December 13, 1887 – September 7, 1985. National Academy of Sciences (Eds.), *Biographical Memoirs: Volume 59* (pp. 338–355). Washington, DC: National Academy of Sciences. https://www.nap.edu/catalog/1652/biographical-memoirs-v59 http://www.nasonline.org/member-directory/deceased-members/51577.html

Bonotto, C., & Baroni, M. (2011). I classici problemi a parole nella Scuola Primaria Italiana: si possono sostituire o affiancare con un altro tipo di attività? I Parte. *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *34A*(1), 9-40.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Prefazione di Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora.

Brousseau, G., & D'Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica. De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, *30*(3), 41-54. DOI: 10.24844/EM3003.02. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol30/3/02_REM_30-3.pdf

Carifio, J (2015). Updating, Modernizing, and Testing Polya's Theory of [Mathematical] Problem Solving in Terms of Current Cognitive, Affective, and Information Processing Theories of Learning, Emotions, and Complex Performances. *Journal of Education and Human Development*, 4(3), 105-117.

D'Amore, B. (1993). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, *47*(2), 14-17.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

D'Amore, B. (2020). *Los problemas de matemática en la práctica didáctica*. Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d'aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, [Svizzera], *34*(66), 43-52.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Un effetto del contratto didattico: Immaginare obblighi impliciti (anche in problemi che chiamano in causa situazioni reali concrete) - An effect of the didactical contract: Imagining implicit requirements (even in problems that involve real concrete situations). *La matematica e la sua didattica*, *27*(2), 161-196. http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php http://www.incontriconlamatematica.net/portale/rivista/91-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica-anno-27-ottobre-2019-numero-2. https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica/

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). *Gli effetti del contratto didattico in aula. Uno strumento concreto per gli insegnanti di Matematica*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. IV vol. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Dedalo.

D'Amore, B., & Zan, R. (1996a). Mathematical Problem Solving. In N. Malara, M. Menghini & M. Reggiani M. (Eds.), *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995*. Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica. Roma: CNR. 136-150. [Questo testo è stato stampato anche in: Gagatsis, A., & Rogers, L. (Eds.) (1996). *Didactics and History of Mathematics*. Erasmus ICP 95 G 2011/11. Thessaloniki: University of Thessaloniki. 35-52].

D’Amore, B., & Zan, R. (1996b). Contributi italiani sul tema “Problemi” (1988-1995). *La matematica e la sua didattica*, *10*(3), 300-321.

Forehand G. A. (1976). Formulazioni e strategie per la ricerca sulla risoluzione dei problemi. En: Kleinmuntz B. (Ed.) (1976). *Problem solving. Ricerche, metodi, teoria*. Roma: Armando.

Gagné R. M. (1962). The acquisition of knowledge. *Psychological Review*. 69, 355-365.

Gagné R. M. (1973). *Le condizioni dell’apprendimento*. Roma: Armando. [Ed. orig. 1965, New York: Holt, Rinehart & Winston].

Gagné R. M. (1976). Problem solving negli uomini: eventi interni ed esterni. En: Kleinmuntz B. (Ed.) (1976). *Problem solving. Ricerche, metodi, teoria*. Roma: Armando.133-150.

Gagné R. M., Briggs L. J. (1974). *Principles of instructional design*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Gagné R. M., Brown L. T. (1961). Some factors in the programming of conceptual learning. *Journal of Experimental Psychology*. 62, 313-321.

Gagné R. M., Mayor J. R., Garstens H. L., Paradise N. E. (1962). Factors in acquiring knowledge of a mathematical task. *Psychological Monographs: GeneraI and Applied*. 7, 76.

Gagné R. M., Paradise N. E. (1961). Abilities and learning sets in knowledge acquisition. *Psychological Monographs: General and Applied*. 75, 14, 1-23.

Hadamard, J (1945/1993). *La psicologia dell’invenzione in campo matematico*. Milano: Raffaele Cortina. [Ed. orig. 1945: *Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover].

Kleinmuntz B. (Ed.) (1976). *Problem solving. Ricerche, metodi, teoria*. Roma: Armando.

Kline, M. (1973). *Why Jonny Can’t Add?* New York: St. Martin’s Press.

Pólya, G. (1945/1967). *Come risolvere i problemi di matematica. Logica e euristica nel metodo matematico*. Milano: Feltrinelli. [Ed. or. 1945: *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press].

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1: Induction and analogy in mathematics*. *Vol. 2: Patterns of plausible inference.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Resnick L. B., Ford W. W. (1991). *Psicologia della matematica ed apprendimento scolastico*. Torino: Sei. [Ed. orig. 1981, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates].

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 57-71.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Thom, R. (1970/1980). La Matematica "moderna": errore pedagogico e filosofico? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *3AB*(3), 4-24. [Ed. orig. 1970: Les Mathématiques "Modernes": un erreur pédagogique et philosophique? *L'âge de la science*, 3, 225-236].

Thom, R. (1973). Modern Mathematics; does it exist? In: A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematics education.* Proceedings II ICMI 1972. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Toulouse, É. (1910). *Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle: Henri Poincaré.* Paris: Flammarion. 195-209.

Van Bendegem, J. P. (2016). The Philosophy of Mathematical Practice: What Is It All About? In G. Kaiser (Ed.), *ICME-13 Topical Survays* (pp. 13-18). Hamburg, Germany: Faculty of Education, University of Hamburg.

Zalamea, F. (2012). *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*. New York, US: Sequence Press.

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora

Zan, R. (2000). L'insegnante come solutore di problemi. *La matematica e la sua didattica*, *14*(1), 48-71.

Zan, R. (2002). I comportamenti dei bambini di fronte al problema scolastico standard: alcune riflessioni. *La matematica e la sua didattica*, *16*(3), 278-305.

Zan, R. (2007). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *30A-B*(6), 741-762.